Vettori paralleli e complanari

Lezione n° 9

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli e complanari)

Continuando lo studio delle grandezze vettoriali in questa lezione ci interesseremo ancora di vettori.
In particolare di vettori paralleli e complanari, cominciamo con alcuni chiarimenti.

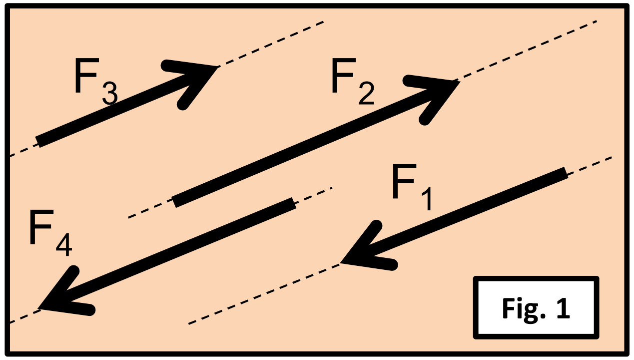


Fig. 1

- Due rette si dicono parallele se sono situate sullo stesso piano e non hanno nessun punto in comune.

- Due o più vettori si dicono complanari se giacciono sullo stesso piano.

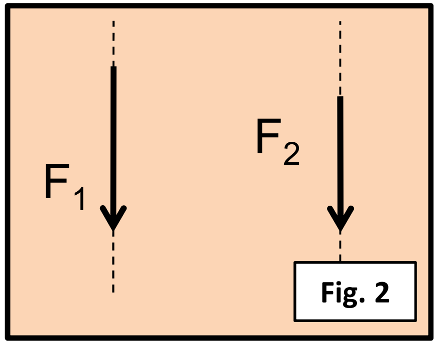


Fig. 2

Per comporre due vettori paralleli occorre utilizzare la regola punta coda in quanto il parallelogramma della regola del parallelogramma si riduce ad un segmento.
Le cose si complicano in quanto si parla di forze applicate ad un corpo rigido estero, in questo caso è necessaria conoscere una ulteriore informazione.
Il punto d'applicazione delle forze (sulle rette distinte)

GRANDEZZE VETTORIALI

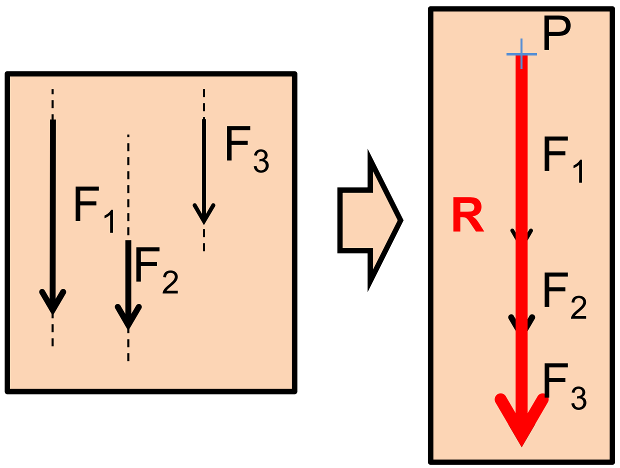
(Composizione di vettori paralleli e complanari)

Quando due vettori sono paralleli sono rappresentati da frecce parallele e possono quindi avere lo <u>stesso verso o quello contrario</u>.

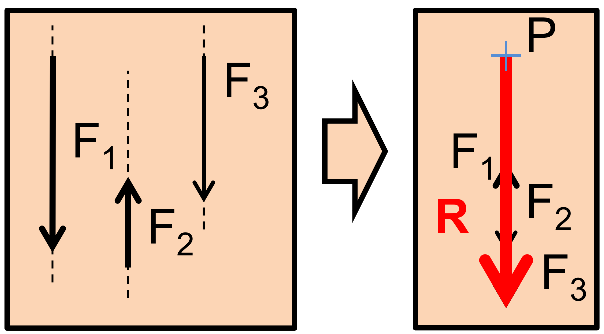
Come detto per comporre due vettori paralleli occorre utilizzare la regola punta coda.

Per applicare la regola punta coda è necessario mettere i due vettori uno di seguito all'altro, il vettore risultante parte dalla coda del primo e arriva alla punta dell'ultimo.
Seguendo questa regola sono possibili due casi:

Tutti i vettori hanno lo stesso verso



Non tutti i vettori hanno versi opposti



GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli e complanari)

Le grandezze vettoriali, fin qui studiate, non erano applicate a nessun corpo esteso in questo caso oltre alle caratteristiche (intensità, direzione e verso) è necessario specificare il punto d'applicazione.

Le caratteristiche di un vettore sono quindi quattro:

- **Intensità**
- **Direzione**
- **Verso**
- **Punto d'applicazione**

Cominciamo di capire come si compongono i vettori paralleli ed in particolare modo come si trova il punto d'applicazione della risultante. Si possono distinguere due casi.

Caratteristiche del vettore risultante di due vettori paralleli e complanari che hanno lo **stesso verso**

- Stessa direzione dei due vettori d'origine.
- Stesso verso dei due vettori d'origine.
- Modulo **somma** dei due moduli vettori d'origine.
- Punto d'applicazione tra le due rette d'azione.

Caratteristiche del vettore risultante di due vettori paralleli e complanari che hanno **verso contrario**

- Stessa direzione dei due vettori d'origine.
- Verso dalla parte del vettore più inteso.
- Modulo **differenza** dei due moduli.
- Punto d'applicazione esterno alle forze (lato della forza più grande).

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli e complanari)

Di seguito appronteremo come determinare la risultante di vettori paralleli e complanari.
Per quanto riguarda l'intensità, la direzione e il verso del vettore risultante, non ci dovrebbero essere difficoltà , in quanto come visto, seguono le regole già esposte. Rimane da chiarire come determinare il suo punto d'applicazione.

Per chiarire come si fa facciamo due esempi con due forze rispettivamente:

1. Concorde
2. Discorde

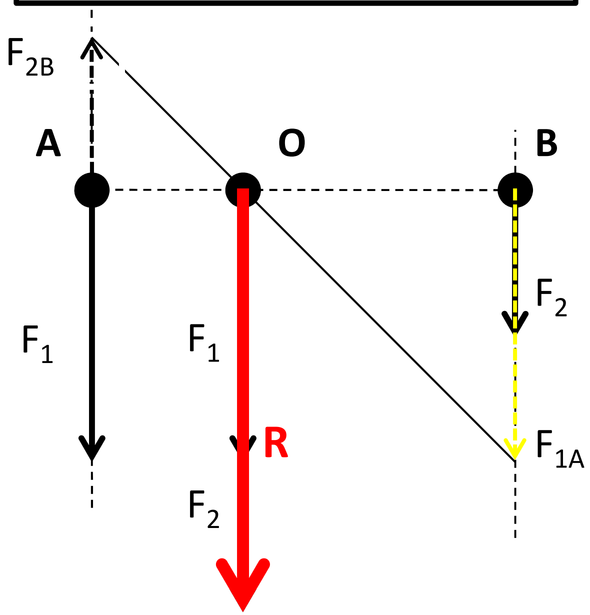
Il metodo grafico è fondamentale per arrivare facilmente al risultante.

Premessa per qualsiasi metodo grafico è stabilire l'unità di misura grafica.

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli , concordi e complanari)

Per determinare il punto di applicazione della forza risultante con metodo grafico bisogna seguire la procedura seguente:



1. Definiamo una opportuna scala sia per le forze che per la distanza fra i punti di applicazione (es. 1[cm]=1[N]);
2. Disegniamo un segmento in scala tra i due punti di applicazione A e B;
3. In A disegniamo il primo vettore F_1 in base alla scala fissata;
4. In B disegniamo il secondo vettore F_2 sempre in base alla scala fissata.
5. Disegniamo di nuovo il vettore F_1, cioè quello di modulo maggiore, sulla direzione di F_2 partendo da B, chiamiamolo F_{1A};
6. Disegniamo l'opposto del vettore F_2, partendo da B, chiamiamolo F_{2B};
7. Congiungiamo ora le frecce dei due nuovi vettori, cioè collega la freccia di F_{1A} con la freccia di F_{2B};
8. Chiamiamo O il punto in cui la retta appena tracciata interseca il segmento AB che rappresenta proprio il punto d'applicazione della risultante;
9. Applichiamo in O il vettore risultante dato dalla somma di F_1 e F_2 (metodo punta coda).

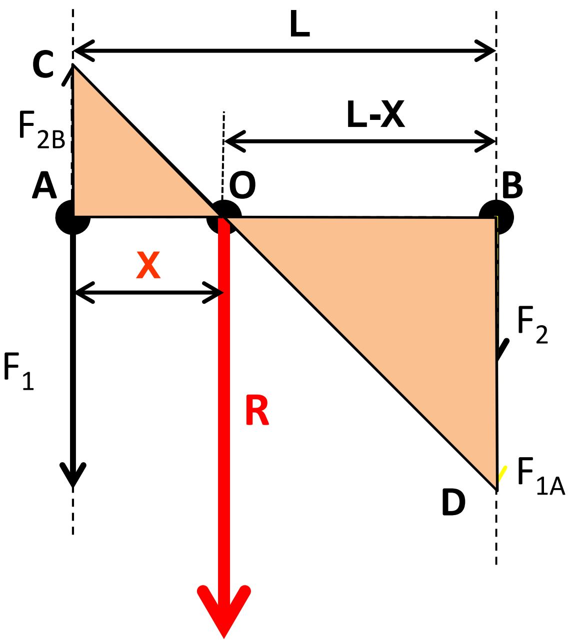
La risultante di due vettori paralleli e concordi è, infatti, un vettore che ha:

A. Direzione parallela a F_1 e F_2;
B. Verso concorde a F_1 e F_2;
C. Modulo uguale alla somma dei moduli di F_1 e F_2;
D. Punto di applicazione individuabile con metodo grafico ricadente tra i due punti di applicazione.

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli , concordi e complanari-metodo analitico)

Con il metodo grafico sia il valore della risultante che la posizione del suo punto d'applicazione si misurano sul disegno. È possibile determinare la stessa cosa analiticamente, facendo riferimento al grafico, già visto in precedenza, si può notare che si formano due triangoli :



1. AOC con il lato verticale uguale al modulo di F_2;
2. OBD con il lato verticale uguale al modulo di F_1;
3. Il lato orizzontale dei due triangoli se la distanza tra i due punti, chiamando x la distanza AO, la distanza OB sarà (L-X) ;
4. I due triangoli sono simili in quanto hanno i tre angoli uguali.

Alla luce di questo è possibile scrivere la proporzione tra i rispettivi lati dei due triangoli:

$$F_2 : F_1 = X : (L\text{-}X) \Rightarrow \frac{\vec{F}_2}{\vec{F}_1} = \frac{X}{L\text{-}X} \Rightarrow \frac{\vec{F}_2}{\vec{F}_1} - \frac{X}{L\text{-}X} = 0$$

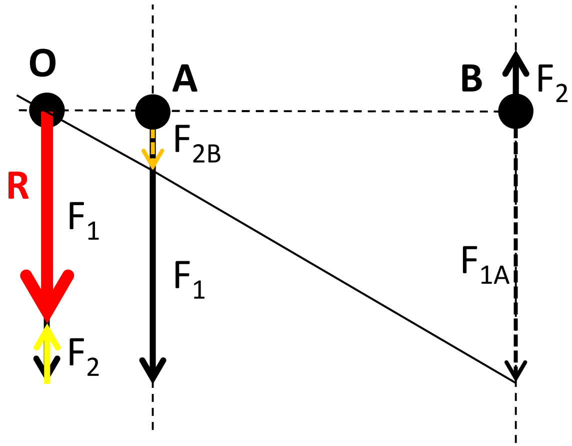
Risolvendo rispetto a X la proporzione si ricava la distanza del punto d'applicazione dal punto A

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_2 \cdot (L\text{-}X) - \vec{F}_1 \cdot X}{\vec{F}_1 \cdot (L\text{-}X)} = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 \cdot L - \vec{F}_2 \cdot X - \vec{F}_1 \cdot X = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 \cdot L - X \cdot (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) = 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow X = \frac{\vec{F}_2 \cdot L}{\vec{F}_2 - \vec{F}_1}$$

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli, discordi e complanari)

Per determinare il punto di applicazione della forza risultante con metodo grafico bisogna seguire la procedura seguente:



1. Definiamo una opportuna scala sia per le forze che per la distanza fra i punti di applicazione (es. 1[cm]=1[N]);
2. Disegniamo un segmento in scala tra i due punti di applicazione A e B;
3. In A disegniamo il primo vettore F_1 in base alla scala fissata;
4. In B disegniamo il secondo vettore F_2 sempre in base alla scala fissata.
5. Disegniamo di nuovo il vettore F_1, cioè quello di modulo maggiore, sulla direzione di F_2 partendo da B, chiamiamolo F_{1A};
6. Disegniamo l'opposto del vettore F_2, partendo da B, chiamiamolo F_{2B};
7. Congiungiamo ora le frecce dei due nuovi vettori, cioè collega la freccia di F_{1A} con la freccia di F_{2B};
8. Prolunghiamo quest'ultima retta ed il segmento AB fino ad intersecarsi;
9. Chiamiamo O il punto d'intersezione, questo rappresenta proprio il punto d'applicazione della risultante;
10. Applichiamo in O il vettore risultante dato dalla somma di F_1 e F_2 (metodo punta coda).

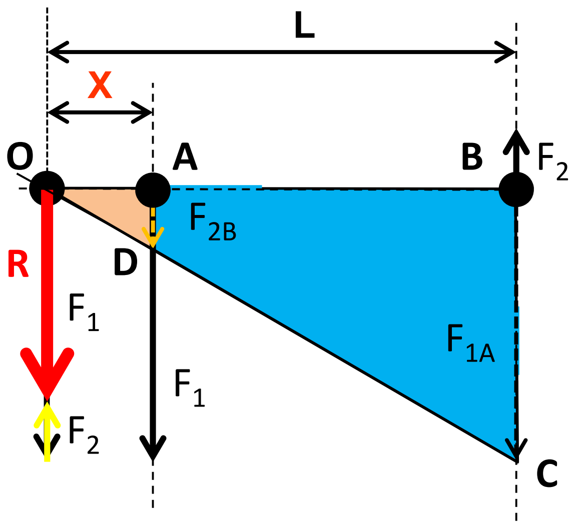
La risultante di due vettori paralleli e concordi è, infatti, un vettore che ha:

A. Direzione parallela a F_1 e F_2;
B. Verso concorde alla forza maggiore tra F_1 e F_2 in questo caso concorde a F_1;
C. Modulo uguale alla differenza dei moduli di F_1 e F_2;
D. Punto di applicazione individuabile con metodo grafico, ricadente fuori dal segmento AB dalla parte della forza maggiore.

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli e complanari-metodo analitico)

Con il metodo grafico sia il valore della risultante che la posizione del suo punto d'applicazione si misurano sul disegno. È possibile determinare la stessa cosa analiticamente, facendo riferimento al grafico, già visto in precedenza, si può notare che si formano due triangoli :



1. OAD con il lato verticale uguale al modulo di F_2 (F_{2B});
2. OBC con il lato verticale uguale al modulo di F_1 (F_{1B});
3. Facendo riferimento alla figura accanto, indichiamo la distanza OB (lato del triangolo OBC) con L, mentre la distanza OA (lato del triangolo OAD) la chiamando X ;
4. I due triangoli sono simili in quanto hanno i tre angoli uguali;

Alla luce di questo è possibile scrivere la proporzione tra i rispettivi lati dei due triangoli:

$$\vec{F}_2 : \vec{F}_1 = X : L$$

Risolvendo rispetto a X la proporzione si ricava la distanza del punto d'applicazione dal punto A

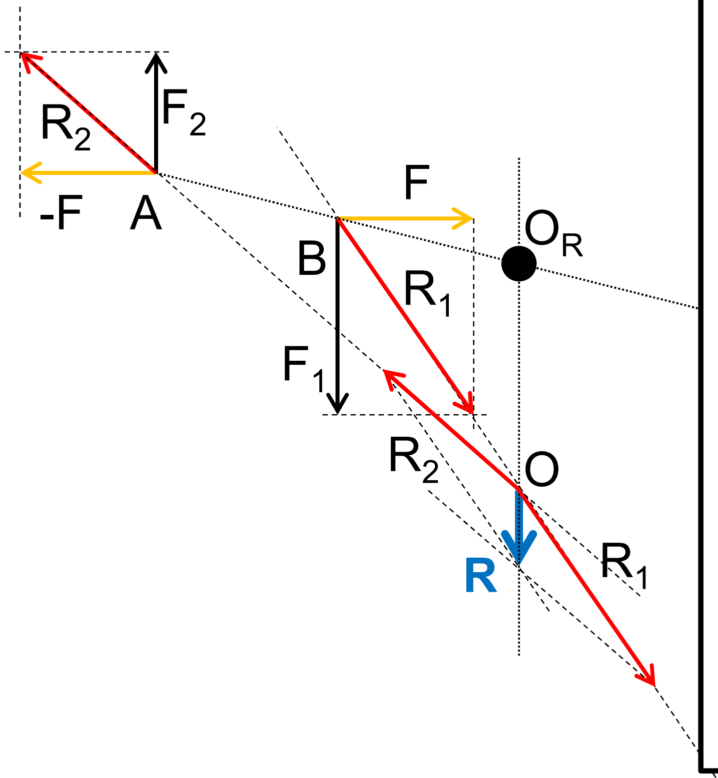
$$X = \frac{\vec{F}_2 \cdot L}{\vec{F}_1}$$

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli, discordi e complanari-metodo grafico alternativo)

Per quanto riguarda la composizione dei **vettori paralleli e discordi** si segue lo stesso procedimento illustrato precedentemente.

In questo caso i due vettori paralleli $\mathbf{F_1}$ applicato i B e $\mathbf{F_2}$ applicato i A son discordi. Ripetiamo la costruzione già eseguita.



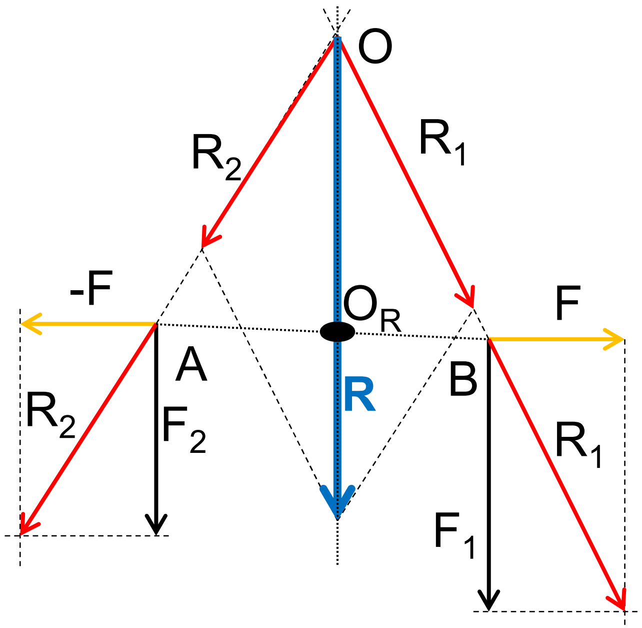
1. Aggiungiamo due vettori di modulo uguale e verso opposto (**F**) e (**–F**) applicate rispettivamente ai punti d'applicazione di F_1 e F_2 (l'operazione così fatta non altera il sistema di forze, in quanto le due forze aggiunte si annullano);
2. Componiamo F_1 con F ottenendo R_1;
3. Componiamo F_2 con (-F) ottenendo R_2;
4. Spostano R_1 e R_2 lungo le loro rette d'azione fino ad avere lo stesso punto d'applicazione O;
5. Componendo, adesso, R_1 e R_2 si ottiene la **risultante finale R**;
6. Il punto d'applicazione della risultante O_R è rappresentato dall'intersezione della retta d'azione di R ed il segmento AB.

GRANDEZZE VETTORIALI

(Composizione di vettori paralleli, concordi e complanari-metodo grafico alternativo)

Esaminiamo adesso un **secondo metodo grafico** per comporre i **vettori paralleli** che si basa sul metodo del parallelogrammo articolato.

Allo scopo consideriamo due vettori paralleli $\mathbf{F_1}$ applicato i B e $\mathbf{F_2}$ applicato i A.
È evidente che in questo caso non è applicabile direttamente il metodo del parallelogrammo articolato (le loro rette d'azione non hanno nessun punto d'intersezione). Per aggirare tale ostacolo, ricorriamo al seguente stratagemma:

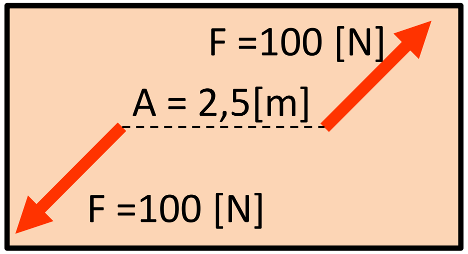


1. Aggiungiamo due vettori di modulo uguale e verso opposto (**F**) e **(–F**) applicate rispettivamente ai punti d'applicazione di F_1 e F_2 (l'operazione così fatta non altera il sistema di forze, in quanto le due forze aggiunte si annullano);
2. Componiamo F_1 con F ottenendo R_1;
3. Componiamo F_2 con (-F) ottenendo R_2;
4. Spostano R_1 e R_2 lungo le loro rette d'azione fino ad avere lo stesso punto d'applicazione O;
5. Componendo, adesso, R_1 e R_2 si ottiene la **risultante finale R**;
6. Il punto d'applicazione della risultante O_R è rappresentato dall'intersezione della retta d'azione di R ed il segmento AB.

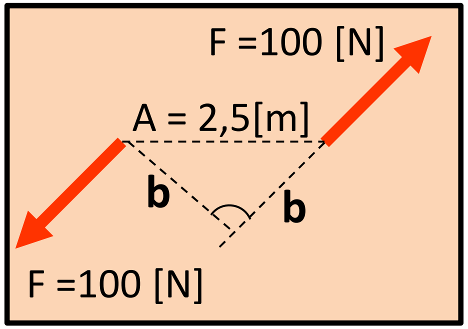
GRANDEZZE VETTORIALI

(Coppia di forze: Esercizi)

Esercizio 1
Calcolare il momento di una coppia avente F=1500 [N] inclinate a 45° rispetto all'orizzontale avente distanza A = 2,5 [m] del punto d'applicazione come in figura:



Soluzione
In questo caso la distanza A non è il braccio della coppia in quanto non è la distanza minima tra le due rette d'azione delle forze.



Il braccio della coppia si determina applicando il teorema di Pitagora

Partendo dal fatto che la distanza A è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele (i due cateti b uguali) è facile ricavare il valore di **b** (braccio).

$$A^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow A^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow \sqrt{A^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2} = \frac{A}{\sqrt{2}} = b \Rightarrow b = \frac{2,5}{1,41} = 1,77 \text{ [m]}$$

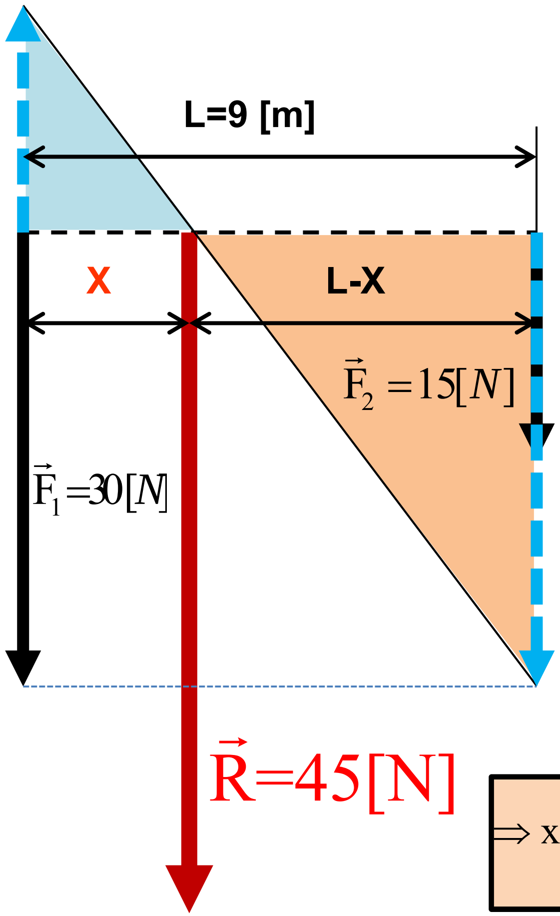
Determinato il braccio, si può calcolare l'intensità del momento

Soluzione : **Intensità** → M=F•b=100 • 1,77=177 [N•m]
Direzione → Ortogonale al piano del foglio **Verso** → Uscente dal piano

GRANDEZZE VETTORIALI

(Vettori complanari e paralleli: Esercizi)

Esercizio 2
Calcolare il punto d'applicazione della risultante di due forze complanari e parallele rispettivamente F_1=30 [N] e F_2=15 [N] con rette con i punti d'applicazione distanti L=9[m] come rappresentato in figura:



Dati: F_1=30 [N] F_2=15 [N] L=9 [m]

Soluzione

- Intensità: (somma algebrica delle due forze).

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=30+15=45$$

- Direzione: verticale come le due forze assegnate
- Verso: il basso come le due forze assegnate
- Punto d'applicazione: sulla retta congiungente il punto d'applicazione delle due forze .

Il punto preciso si può calcolare applicando una semplice proporzione ai lati dei due triangoli colorati in figura

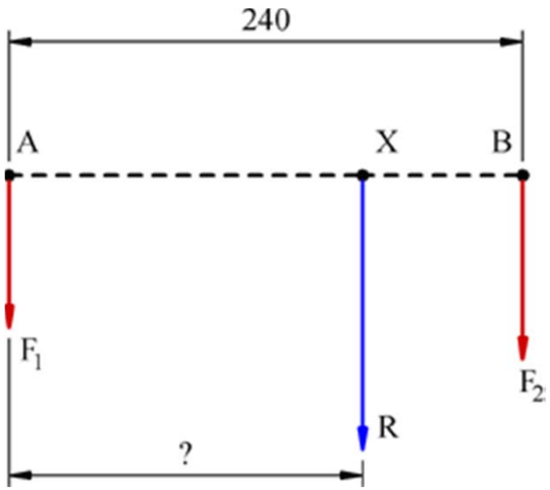
$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2}=\frac{L\text{-}x}{x} \Rightarrow \frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2}-\frac{L\text{-}x}{x}=0 \Rightarrow \frac{x\cdot\vec{F}_1-\vec{F}_2\cdot L+x\cdot\vec{F}_2}{x\cdot\vec{F}_2}=0$$

$$\Rightarrow x\cdot\vec{F}_1-\vec{F}_2\cdot L+x\cdot\vec{F}_2=0 \Rightarrow x\cdot(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=\vec{F}_2\cdot L \Rightarrow x=\frac{\vec{F}_2\cdot L}{(\vec{F}_1+\vec{F}_2)}=\frac{30\cdot 9}{30+15}=\frac{270}{45}=6\ [m]$$

GRANDEZZE VETTORIALI

(Vettori complanari e paralleli: Esercizi)

Esercizio n. 3
Trovare il punto di applicazione della risultante di due forze parallele cospiranti distanti fra loro 240 cm, le cui intensità sono F_1=8N F_2=12N.



Dati: F_1=8 [N] F_2=12 [N] L=240 Cm=2.40 [m]

Soluzione

- Intensità: (somma algebrica delle due forze). $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=8+12=20$
- Direzione: verticale come le due forze assegnate
- Verso: il basso come le due forze assegnate
- Punto d'applicazione:
  - sulla retta congiungente il punto d'applicazione delle due forze .
  - Distanza dal punto A:

Si calcola come l'esercizio precedente ossia:

$$X = \frac{\vec{F}_2 \cdot L}{\vec{F}_2 - \vec{F}_1} = \frac{8 \cdot 2.40}{12+8} = 0.96\ [m]$$

GRANDEZZE VETTORIALI

(Vettori complanari e paralleli: Esercizi)

Esercizio 4
Rispondere alle seguenti domande (vero o falso):

N	QUESITO	V	F	RISPOSTA ESATTA
1	Per descrivere una forza applicata ad un corpo occorrono due elementi: verso e intensità			**F**
2	L'intensità di una forza è il numero espresso in kg che misura il valore della forza			**F**
2	Si definisce risultante di due o più forze, quella forza che produce gli stessi effetti del sistema dato			**V**
2	L'insieme di due o più forze, agenti contemporaneamente su un corpo, costituisce un sistema di forze			**V**
2	La risultante si calcola con il metodo del quadrato alternativo a quello del parallelogramma			**F**
2	La risultante di più di due forze si calcola applicando più volte il metodo del parallelogramma			**V**
2	Il metodo del triangolo si usa quando si ricerca la risultante di più forze			**F**
2	La forza F, che agisce in un punto A, può venire sostituita con due o più forze con la regola del parallelogramma			**V**
2	Il metodo analitico del calcolo della risultante si attua mediante la formula di Carnot			**F**
2	Quando due forze sono perpendicolari fra loro si può applicare il teorema di Pitagora			**V**
2	Si definisce momento di una forza F rispetto ad un punto O, il prodotto dell'intensità della forza F per la distanza minima di O dalla retta d'azione della forza			**V**
2	Essendo la forza in Kg e la distanza in cm il momento si misura in kg·cm			**F**
2	L'unità di misura del momento è il Newton			**F**
2	Il verso del vettore momento si determina con la regola della mano destra o sinistra a seconda dei casi			**F**
16	La direzione del vettore momento è perpendicolare al piano della forza e del punto			**V**

GRANDEZZE VETTORIALI

(Vettori complanari e paralleli: Esercizi)

Ricerca grafica punto applicazione della risultante di due forse parallele e concorde

PRIMO METRODO

SECONDO METODO