

CORSO DI FISICA GENERALE

CINEMATICA - MOTO CIRCOLARE UNIFORME

LEZIONE N. 17

CINEMATICA

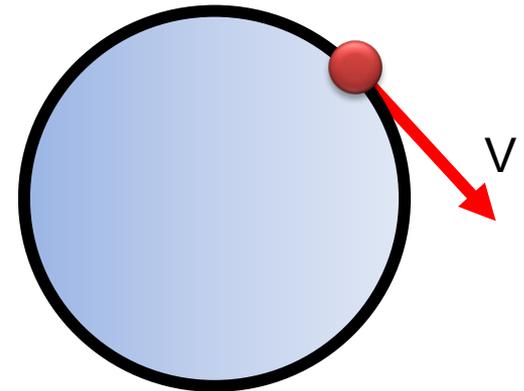
(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Il moto che ci accingiamo a studiare fa parte dei moti piani (moti che avvengono nel piano)

Si dice moto circolare uniforme il moto di un corpo (considerato puntiforme) che avviene:

✓ *su una traiettoria circolare (una circonferenza)*

✓ *con velocità (intensità) costante.*



CINEMATICA

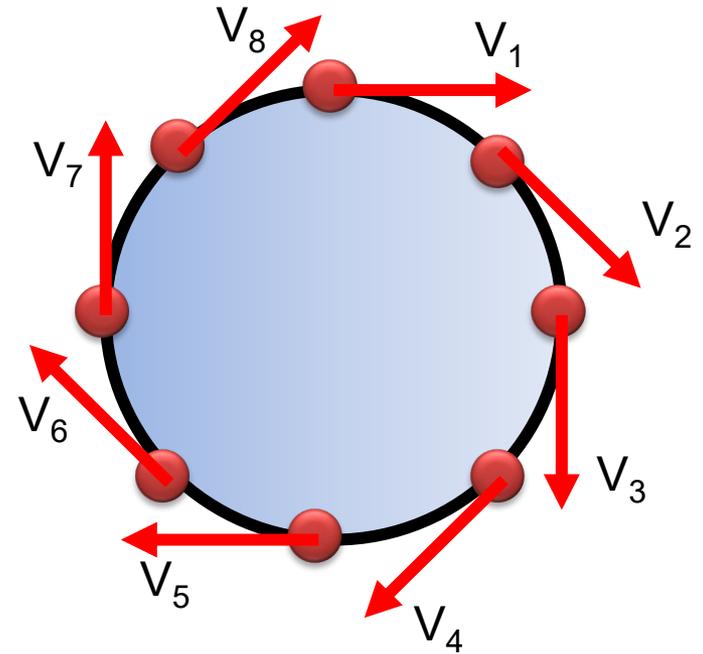
(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

*Dire che l'intensità della velocità è costante significa che si mantiene costante solo il valore, mentre la **direzione** della velocità **cambia continuamente**.*

La velocità, come ben sappiamo, è un **vettore** per cui è caratterizzata da **intensità, direzione e verso**.

Per il fatto che la velocità cambia di direzione, anche se non cambia in intensità, il moto circolare uniforme è un **moto accelerato**.

Questo fatto è di grande importanza ed è necessario sottolinearlo, perché, siccome il modulo della velocità è costante, si potrebbe essere **tentati di considerarlo un moto non accelerato**.



CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Definiamo ora alcune grandezze relative al moto circolare uniforme :

Periodo

Il periodo è il **tempo impiegato a fare un giro completo**.
Esso si misura nel S.I in secondi. Di solito viene indicato con T (maiuscola).

Per esempio, se percorro in auto una rotonda in 20 s , il periodo del moto circolare uniforme che compio è proprio uguale a 20 s , per cui $T = 20$ s.

Frequenza

La frequenza indica il numero di giri completi effettuati nell'unità di tempo. In genere viene indicata con f (minuscola)

Nel S.I la frequenza si misura in hertz (Hz)

1 Hz è la frequenza di un punto materiale che compie un giro in un secondo.

CINEMATICA

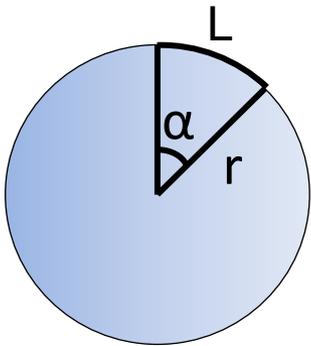
(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Fra il periodo e la frequenza sussiste la seguente relazione matematica :

$$f = 1 / T$$

Per esempio, se il periodo di un moto circolare uniforme è 5 s ciò significa che il corpo fa un giro completo in 5 secondi. Quanti giri farà al secondo ? Ovviamente $1/5$, per cui la frequenza di questo moto sarà $1/5 = 0,2$ Hz

Radiante



$$L = \alpha \cdot r$$

L'unità di misura che generalmente usiamo per misurare gli angoli è il grado sessagesimale. Questa unità di misura non è nel S.I., infatti in esso l'unità di misura degli angoli che prende il nome di **Radiante**.

Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso

Se misuriamo l'angolo in radianti, la lunghezza dell'arco è uguale al prodotto dell'angolo (in radianti) per il raggio.

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Equivalenza tra gradi sessagesimali e radianti

Sappiamo che un angolo giro è uguale a 360°

Ma se consideriamo un angolo giro la lunghezza dell'arco è proprio uguale alla lunghezza della circonferenza: $L = 2\pi r$

Poiché sappiamo che se l'angolo è espresso in radianti vale la formula $L = \alpha \cdot r$ allora vale anche la sua inversa

$$\rightarrow \alpha = \frac{L}{r}$$

Siccome la lunghezza della circonferenza (angolo giro di 360°) è $L=2\pi r$, sostituendo nella precedente:

$$\rightarrow \alpha = 360^\circ = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

In definitiva un angolo giro di 360° equivale a 2π radianti.

Per trasformare un angolo da gradi (es. 90°) in radianti basta impostare la proporzione seguente:

$$2\pi \text{ rad} : 360^\circ = x : 90^\circ$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Equivalenza da radianti in gradi sessagesimali

Per la trasformazione è necessario impostare sempre la stessa proporzione precedente, cambiando l'incognita nel modo seguente:

$$2\pi \text{ rad}:360^\circ = 1 \text{ rad}:x$$

Ossia 1 rad vale:

$$x = 1 \text{ rad} = \frac{360 \cdot 1 \text{ rad}}{2\pi} = \frac{360}{6,28} = 57,3^\circ$$

A titolo esemplificativo si riporta in tabella la conversione alcuni particolari valori di angoli nei due sistemi di misura.

Gradi	Radianti
0	0
90	$\pi/2$
180	π
270	$2\pi/3$
360	2π

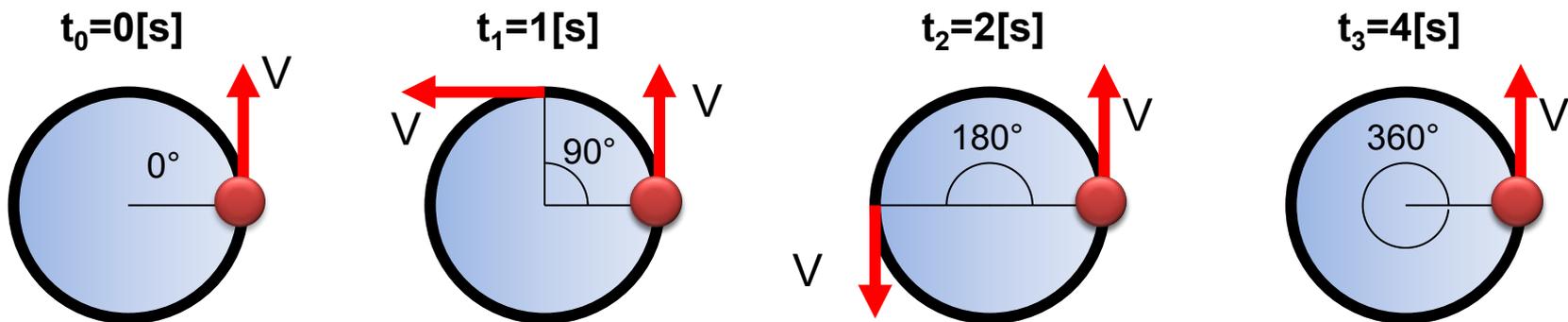
CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Torniamo al moto circolare uniforme, come detto il modulo (intensità) della velocità periferica è costante.

Questo comporta che il punto materiale **percorre archi uguali di circonferenza in tempi uguali.**

Consideriamo un punto P che si muove di moto circolare uniforme e che nell'intervallo di tempo $\Delta t_1=1$ [s] percorre un quarto di circonferenza, ne segue che nell'intervallo di tempo $\Delta t_2=2$ [s] percorrerà metà circonferenza, nell'intervallo di tempo $\Delta t_3=4$ [s] percorrerà metà circonferenza.



CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

La velocità tangenziale o periferica

Quando il punto materiale compie un giro completo, lo spazio percorso è proprio uguale alla lunghezza della circonferenza.

Se la circonferenza ha raggio r allora $\Delta s = 2\pi r$

Mentre il tempo impiegato sarà proprio uguale al periodo T (l'unità di misura del periodo nel S.I. è il **secondo**).

Ricordando la definizione della velocità si ha:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

In definitiva per calcolare la velocità tangenziale di un punto materiale bisogna usare la formula

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

La velocità angolare

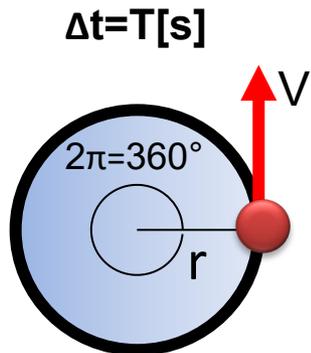
Si definisce **velocità angolare** la rapidità con cui si **percorrono gli angoli** ossia la quantità:

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t}$$

α è l'angolo in radianti

Δt è la variazione di tempo

Ricordando che se il punto compie un giro completo, compie cioè un angolo giro, in radianti è di 2π



mentre il tempo necessario per compiere un giro completo è detto periodo (T), allora risulta :

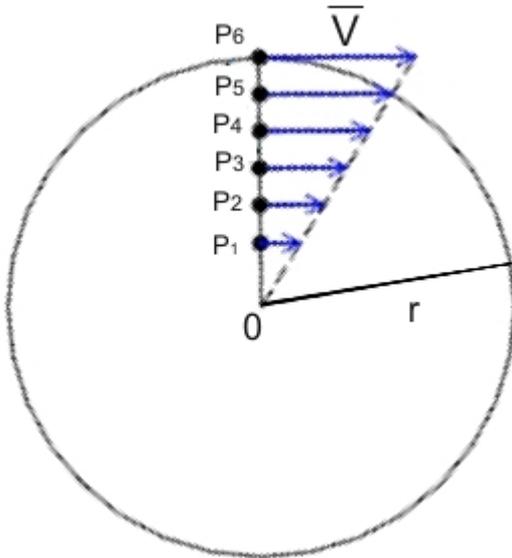
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

L'unità di misura della velocità angolare è il **rad/s**

CINEMATICA

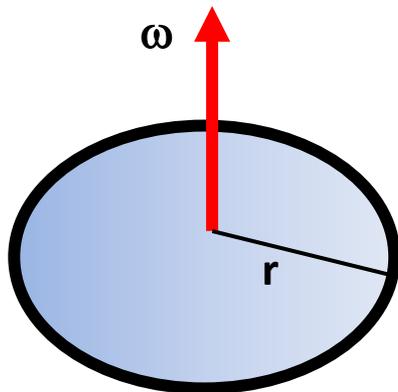
(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

La velocità tangenziale o periferica



Si nota che la velocità periferica è funzione di r , pertanto, considerati una serie di punti che ruotano allineati lungo il raggio, la velocità periferica è tanto minore quanto più il punto è vicino al centro di rotazione.

$$V = \frac{2 \pi r}{T}$$



Per quanto riguarda invece la velocità angolare Non dipende dal raggio dove si trova il punto che ruota infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

La velocità angolare, velocità periferica e frequenza

Considerando che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La velocità tangenziale si può esprimere in funzione della velocità angolare, ossia:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Ricordando che la frequenza è data da:

$$f = \frac{1}{T}$$

Per la velocità tangenziale si può anche scrivere:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

Mentre per la velocità angolare si può anche scrivere:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

La velocità tangenziale

La velocità angolare è un vettore che ha:

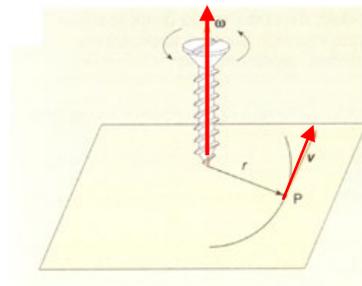
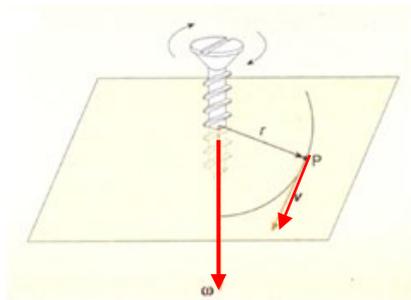
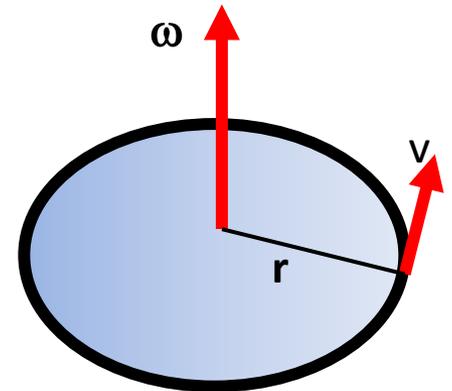
✓ Il modulo pari a:



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

✓ La direzione perpendicolare al piano della circonferenza

✓ Il verso è quello in cui avanza una vite quando la sua testa ruota nello stesso verso del punto.



CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

L'accelerazione tangenziale e centripeta

In generale l'accelerazione è data da una variazione della velocità nel tempo, nel caso del moto circolare uniforme è necessario distinguere:

$\vec{a}_t \Rightarrow$ accelerazione tangenziale è causata dalla variazione del modulo velocità
 $\vec{a}_c \Rightarrow$ accelerazione centripeta è causata dalla variazione della direzione velocità

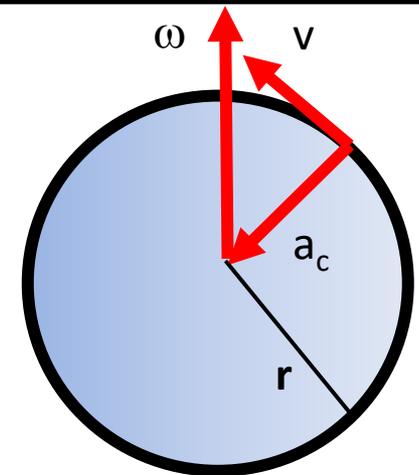
Accelerazione tangenziale:

È nulla in quanto il modulo della velocità è costante.

Accelerazione normale o centripeta:

$$a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

L'accelerazione centripeta è diretta sempre verso il centro della circonferenza.



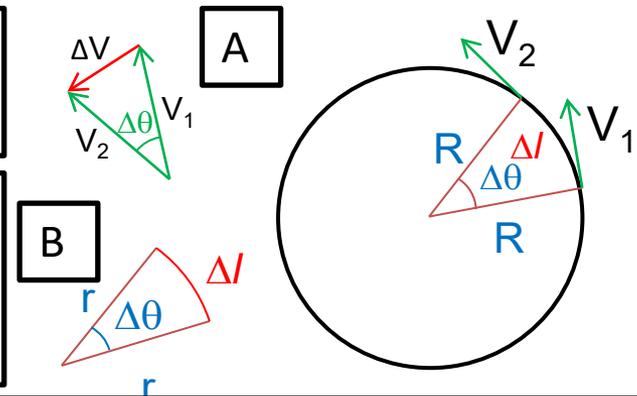
(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

L'accelerazione tangenziale e centripeta

Cerchiamo adesso di dimostrare quanto detto precedentemente per quanto riguarda l'accelerazione centripeta. Consideriamo un punto che ruota sulla circonferenza, all'inizio occupa la posizione P_1 dopo un intervallo di tempo Δt il punto si troverà in P_2

Cerchiamo di calcolare ΔV rappresentato con il triangolo A

Sappiamo inoltre che Δl , per un intervallo di tempo piccolo (infinitesimo) può essere confuso con la corda del triangolo B



I due triangoli isosceli hanno lo stesso angolo al vertice e sono pertanto simili. Pertanto possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$\Delta V : V \cong \Delta l : r \Rightarrow \Delta V = V \frac{\Delta l}{r} \quad \text{Considerando che: } \Delta l = V \Delta t \quad \text{Per } \Delta V \text{ si ottiene:}$$

$$\Delta V = V \cdot \frac{\Delta l}{r} = \frac{V \cdot V \cdot \Delta t}{r} = \frac{V^2 \cdot \Delta t}{r}$$



$$ac = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow ac = \frac{1}{\Delta t} \frac{V^2 \Delta t}{r} = \frac{V^2}{r}$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Esercizio n. 1

Il seggiolino di una giostra esegue 10 giri in 14 secondi. Calcolare il periodo e la frequenza. Se il raggio della giostra è 4 metri, quanto vale la velocità tangenziale del seggiolino?

Soluzione

Dati: giri=10 $\Delta t=14$ [s] $r=4$ [m]

Periodo

$$T = \frac{\text{tempo necessario per compiere } n \text{ giri}}{\text{numero di giri}}; \quad \Rightarrow T = \frac{14}{10} = 7 \text{ [s]}$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7} = 0,143 \text{ [Hz]}$$

Velocità periferica o tangenziale

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{6,28 \cdot 4}{7} = 3,59 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Esercizio n. 2

La velocità tangenziale di un corpo che si muove sopra una circonferenza di raggio 4 m vale 3 m/s. Calcolare il numero di giri che compie in un minuto, il tempo impiegato per un giro e la frequenza.

Soluzione

Dati: $V=3$ [m/s] $\Delta t=60$ [s] $r=4$ [m]

Periodo (partendo dalla velocità periferica)

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{6,28 \cdot 4}{3} = 8,37 \text{ [s]}$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7,17} = 0,14 \text{ [Hz]}$$

Numero di giri (sapendo il periodo T)

$$\text{numero di giri} = \frac{\text{tempo necessario per compiere n giri}}{T}; \Rightarrow T = \frac{60}{8,37} = 7,17 \text{ [s]}$$

CINEMATICA

(MOTO CIRCOLARE UNIFORME)

Esercizio n. 3

Un punto compie 10 giri di una circonferenza, muovendosi di moto uniforme, nel tempo di 5 secondi. Calcolare il periodo del moto e la frequenza.

Soluzione

Il periodo è il tempo impiegato per compiere un giro completo. Perciò:

Periodo

$$T = \frac{\text{tempo necessario per compiere } n \text{ giri}}{\text{numero di giri}}; \Rightarrow T = \frac{5}{10} = 0,5[s]$$

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} = 2[Hz]$$